МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

26 май 2022 г.

ОБЩООБРАЗОВАТЕЛНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 1

ЧАСТ 1 (Време за работа: 90 минути)

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Стойността на израза $2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{3}}$ е равна на:

А) $6^{\frac{1}{6}}$ Б) $17^{\frac{1}{6}}$ В) $72^{\frac{1}{6}}$ Г) $6^{\frac{5}{6}}$

2. Корените x_1 и x_2 на кое от дадените уравнения изпълняват условието $x_1x_2+3(x_1+x_2)=5$?

А) $x^2+2x+1=0$ Б) $x^2-2x-1=0$

В) $x^2+2x-1=0$ Г) $x^2-2x+1=0$

3. Точките *M* и *P* са среди съответно на страните *AB* и *AC* в $\triangle ABC$. Векторът $\overrightarrow{BP}$, изразен чрез векторите $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BM}$, е:

А) $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}$ Б) $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BM}$

В) $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{BM}$ Г) $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}$

4. Точка *M* от страната *AC* на $\triangle ABC$ е такава, че $CM:MA=2:3$. Права през *M*, успоредна на *AB*, пресича *BC* в точка *N*. Ако $MN=6$ cm, то дължината на страната *AB* е равна на:

А) 9 cm Б) 10 cm В) 12 cm Г) 15 cm

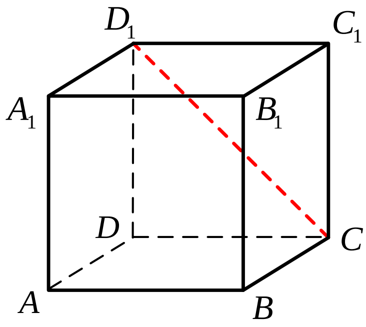
5. **В куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ мярката на ъгъла между правите AB и CD_1 е:**

А) $0°$

Б) $45°$

В) $60°$

Г) $90°$



6. **Множеството от решенията на уравнението $\sqrt{x^2-2x+1}=1-x$ е:**

А) $\varnothing$ Б) $\{1\}$ В) $(-\infty;1]$ Г) $\mathbb{R}$

7. **Уравнението $(x-4)x^2=(x-4)(2x+1)$**

А) няма корени Б) има един корен

В) има два корена Г) има три корена

8. **Множеството от решенията на неравенството** $\frac{2x-1}{x+3}>1$ е:

А) $(4;+\infty)$ Б) $(-3;4)$ В) $(-\infty;-3)$ Г) $(-\infty;-3)\cup(4;+\infty)$

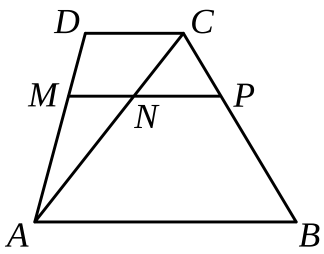
9. **Всички решения на неравенството $\log_{\frac{1}{2}} x<-3$ са числата от интервала:**

А) $\left(0;\frac{1}{8}\right)$ Б) $(-\infty;8)$ В) $\left(\frac{1}{8};+\infty\right)$ Г) $(8;+\infty)$

10. **В $\triangle ABC$ страната AB = 10 cm. Окръжност с център точка C и диаметър 14 cm се допира до правата AB. Лицето на $\triangle ABC$ е равно на:**

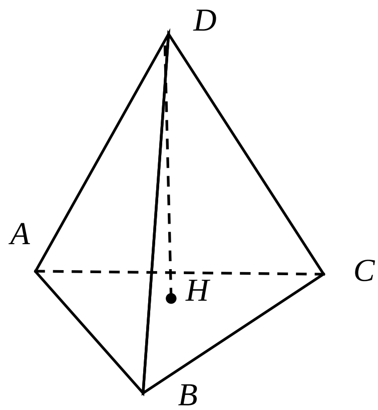
А) 17,5 cm^2 Б) 35 cm^2 В) 70 cm^2 Г) 140 cm^2

11. **В трапец *ABCD* през точка *M* от бедрото *AD* е построена права, успоредна на основите, която пресича диагонала *AC* и бедрото *BC* съответно в точки *N* и *P.* Ако *AM = 2MD* и *AB = 3CD*, то отношението *MN : NP* е:**



А) 1:2 Б) 2:3 В) 3:4 Г) 4:5

12. **Основата на пирамидата *ABCD* е остроъгълният триъгълник *ABC* с $\measuredangle BAC = 60^\circ$. Околните ръбове образуват с основата на пирамидата ъгъл 45°. Ако височината на пирамидата е $DH = h$, то изразете чрез *h* ръба *BC*.**



А) $\frac{1}{2}h$

Б) $h\frac{\sqrt{3}}{2}$

В) h

Г) $h\sqrt{3}$

13. **Колко на брой от функциите $y = 2x - 1$, $y = 3 - x$ и $y = x^2 + 2x$ са растящи при *x* > 0?**

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

14. **Множеството от стойностите на функцията $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$ за $x \in [-2; 4]$ е интервалът:**

А) [1;9] Б) [3;9] В) [2;18] Г) [6;18]

15. **Ако точката $(m; \sqrt{3})$ е от графиката на функцията $y = \sqrt[3]{x}$, то *m* е равно на:**

А) 27 Б) 3 В) $\sqrt[6]{3}$ Г) $3\sqrt{3}$

16. Ако редицата 3, *a*, *b*, 21 е аритметична прогресия, то произведението на *a* и *b* е равно на:

А) 24 Б) 63 В) 90 Г) 135

17. Ако $\sin\alpha = -\frac{2}{7}$ **и** $\alpha \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$**, то стойността на** $\sin 2\alpha$ **е:**

А) $-\frac{4}{7}$ Б) $-\frac{3\sqrt{5}}{7}$ В) $\frac{3\sqrt{5}}{7}$ Г) $\frac{12\sqrt{5}}{49}$

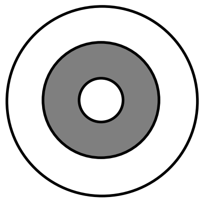
18. Стойността на израза $\frac{\sin 20^\circ \cos 110^\circ + \cos 160^\circ \sin 70^\circ}{\cos 180^\circ - \sin 90^\circ}$ **е:**

А) $\frac{1}{2}$ Б) $-\frac{1}{2}$ В) 0 Г) –1

19. В кутия има 7 бели и 9 сини топки, като белите са номерирани с числа от 1 до 7, а сините – с числа от 1 до 9. От кутията се изважда една топка. Вероятността изтеглената топка да е бяла или да е с номер, кратен на 4, е:

А) $\frac{1}{16}$ Б) $\frac{7}{16}$ В) $\frac{9}{16}$ Г) $\frac{5}{8}$

20. Мишена се състои от три концентрични кръга с радиуси съответно 5 cm, 15 cm и 25 cm. При стрелба се уцелва произволна точка от нея. Вероятността точката да е от сивия венец, е:



А) $\frac{1}{3}$ Б) $\frac{2}{5}$ В) $\frac{8}{25}$ Г) $\frac{1}{2}$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

26 май 2022 г.

ОБЩООБРАЗОВАТЕЛНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 1

ЧАСТ 2 (Време за работа: 150 минути)

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 21. до 23. включително запишете в листа за отговори!

21. Сборът на първите тринадесет члена на намаляваща аритметична прогресия е 130. Четвъртият, десетият и седмият член на тази прогресия, взети в този ред, са последователни членове на геометрична прогресия. Намерете първия член и разликата на аритметичната прогресия.

22. Решете:

а) уравнението $\sin^2 2\pi x - 2\cos 2\pi x + 2 = 0$ **и намерете сбора на първите му 100 положителни корена;**

б) неравенството $\left|x^2 - 15x - 1\right| \le 15$ **и намерете кои от корените на тригонометричното уравнение от подточка а) са негови решения.**

23. В успоредник *ABCD* с лице $52\sqrt{3}$ **cm² ъглополовящата на** $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ **пресича страната *CD* в точка *M* така, че** $DM : MC = 8 : 5$**.**

Намерете:

а) страните на успоредника;

б) косинуса на $\sphericalangle AMB$ **;**

в) разстоянието от върха *A* до правата *BM*.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

26 май 2022 г.

ОБЩООБРАЗОВАТЕЛНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1.	В	2
2.	Б	2
3.	Г	2
4.	Г	2
5.	Б	2
6.	В	3
7.	Г	3
8.	Г	3
9.	Г	3
10.	Б	3
11.	Б	3
12.	Г	3
13.	В	3
14.	А	3
15.	Г	3
16.	Г	3
17.	Г	3
18.	А	3
19.	В	3
20.	В	3
21.	$a_1 = 70,\ d = -10$	15
22.	а) $x = k,\ k \in Z$ $S = \frac{1+100}{2}.100 = 5050.$ б) $x \in [-1; 1] \cup [14; 16]$ $x = -1,\ 0,\ 1,\ 14,\ 15,\ 16$	15
23.	а) $AB = CD = 13\ cm$ $AD = BC = 8\ cm$ б) $\cos\sphericalangle AMB = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ в) $AH = \frac{52\sqrt{3}}{7}\ cm$	15

Задача 21.

Решение:

1. Означаваме $\div a_1, a_2, \ldots.$ и разлика d

$$S_{13} = \frac{a_1 + a_{13}}{2}.13 = 130 \Rightarrow a_1 + a_{13} = 20$$

$$\Rightarrow 2a_7 = a_4 + a_{10} \Rightarrow a_7 = 10$$

2. $a_4,\ a_{10},\ a_7$ са последователни членове на геометрична прогресия $\Rightarrow a_{10}^2 = a_4.a_7$

3. Нека $a_{10} = x \Rightarrow a_4 = 20 - x$

Тогава след заместване в $a_{10}^2 = a_4.a_7$ $x^2 = 10(20 - x) \Rightarrow x^2 + 10x - 200 = 0$

се получава $x_1 = 10,\ x_2 = -20$

4. При $x_1 = 10 \Rightarrow a_{10} = 10$ и $a_7 = 10$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a_7 = a_1 + 6d = 10 \\ a_{10} = a_1 + 9d = 10 \end{array} \right. \Rightarrow a_1 = 10, d = 0$$

Тъй като аритметичната прогресия е намаляваща, то $d < 0 \Rightarrow a_1 = 10,\ d = 0$ не е решение.

5. При $x_1 = -20 \Rightarrow a_{10} = -20$ и $a_7 = 10$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a_7 = a_1 + 6d = 10 \\ a_{10} = a_1 + 9d = -20 \end{array} \right. \Rightarrow a_1 = 70, d = -10$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

За съставена система с a_1 и d	5 точки
$a_1 = 10,\ d = 0$ и извод, че не е решение	5 точки
$a_1 = 70,\ d = -10$	5 точки

Задача 22.

Решение:

а) Преобразуване на $\sin^2 2\pi x - 2\cos 2\pi x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 2\pi x - 2\cos 2\pi x + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2\pi x + 2\cos 2\pi x - 3 = 0$ и след полагане на $t = \cos 2\pi x$, $t \in [-1; 1]$ се получава уравнението $t^2 + 2t - 3 = 0$ с корени $t_1 = 1$ и $t_2 = -3$, като решение е само $t = 1$.

От $\cos 2\pi x = 1$ се намира $2\pi x = 2k\pi$ и $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Първите 100 положителни корена са 1, 2, …, 100 и сборът им е $S = \dfrac{1+100}{2}.100 = 5050$.

б) $\left|x^2 - 15x - 1\right| \le 15 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2 - 15x - 1 \le 15 \\ x^2 - 15x - 1 \ge -15 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2 - 15x - 16 \le 0 \\ x^2 - 15x + 14 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} -1 \le x \le 16 \\ x \le 1 \ \cup \ x \ge 14 \end{array}\right. \Leftrightarrow \ x \in [-1;\ 1] \cup [14;\ 16]$.

Решения на уравнението и на неравенството са числата $x = -1,\ 0,\ 1,\ 14,\ 15,\ 16$.

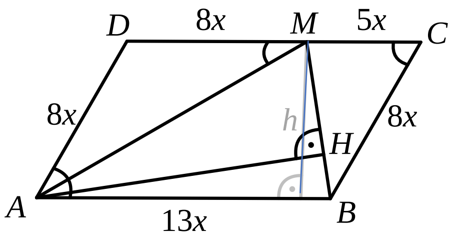
Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а)Представяне на $\sin^2 2\pi x = 1 - \cos^2 2\pi x$ и получаване на уравнението $\cos^2 2\pi x + 2\cos 2\pi x - 3 = 0$	2 точки
Полагане на $t = \cos 2\pi x$, получаване на уравнението $t^2 + 2t - 3 = 0$ и намиране на корените $t_1 = 1$ и $t_2 = -3$	3 точки
Решаване на уравнението $\cos 2\pi x = 1$	2 точки
Пресмятане на сбора на първите 100 положителни корена	2 точки
б)Представяне на $\left|x^2 - 15x - 1\right| \le 15$ като система $\left|\begin{array}{l} x^2 - 15x - 1 \le 15 \\ x^2 - 15x - 1 \ge -15 \end{array}\right.$	2 точки
Получаване на $-1 \le x \le 16$, $x \le 1 \ \cup \ x \ge 14$ и намиране на решенията $x \in [-1;\ 1] \cup [14;\ 16]$	3 точки
Направен извод за общите решения $\pm 1,\ 0,\ 14,\ 15,\ 16$ на тригонометричното уравнение и на неравенството	1 точка

Задача 23.

Решение:

а) Означаваме $DM = 8x$ и $MC = 5x$.



От $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAD$ (AM е ъглополовяща на $\sphericalangle BAD$) и $\sphericalangle BAM = \sphericalangle AMD$ (кръстни ъгли) следва, че $\sphericalangle AMD = \sphericalangle MAD$, $\triangle AMD$ е равнобедрен и $AD = DM = 8x$.

В успоредника $ABCD$ $AB = CD = 13x$ и от $S_{ABCD} = 52\sqrt{3}$ и

$S_{ABCD} = AB.AD.\sin 60° = 13x.8x.\frac{\sqrt{3}}{2} = \; = 52\sqrt{3}x^2$ се намира $x = 1$.

Страните на успоредника са $AB = CD = 13\,cm$ и $AD = BC = 8\,cm$.

б) От косинусовата теорема в $\triangle AMD$, $\triangle BCM$ и $\triangle ABM$ последователно се намира:

$$AM^2 = AD^2 + DM^2 - 2AD.DM.\cos 120° = \; 64 + 64 + 2.8.8.\frac{1}{2} = 3.64 = 192 \text{ и}$$

$AM = 8\sqrt{3}\,cm$;

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 - 2BC.CM.\cos 60° = \; 64 + 25 - 2.8.5.\frac{1}{2} = 49 \text{ и } BM = 7\,cm;$$

$$\cos\sphericalangle AMB = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2.AM.BM} = \frac{192 + 49 - 169}{2.8\sqrt{3}.7} = \frac{72}{2.8\sqrt{3}.7} = \frac{9}{14\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

в) Ако h е височината към страната AB в $\triangle ABM$, то $S_{ABM} = \frac{AB.h}{2}$. От друга страна, $S_{ABCD} = AB.h$. Следователно $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 26\sqrt{3}\,cm^2$.

Построява се $AH \perp BM$ $\left(H \in BM\right)$ и от $S_{ABM} = \frac{1}{2}BM.AH$ се намира, че търсеното разстояние е $AH = \frac{2S_{ABM}}{BM} = \frac{2.26\sqrt{3}}{7} = \frac{52\sqrt{3}}{7}\,cm$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Означаване на $DM = BC = 8x$, $MC = 5x$ и доказване, че $AD = DM$.	2 точки
Намиране на $x = 1$ и на страните $AB = CD = 13\,cm$ и $AD = BC = 8\,cm$	3 точки
б) Намиране на $AM = 8\sqrt{3}\ cm$, $BM = 7\ cm$ и $\cos\sphericalangle AMB = \frac{3\sqrt{3}}{14}$	6 точки
в) Намиране на $S_{ABM} = 26\sqrt{3}\ cm^2$ и на търсеното разстоянието $AH = \frac{52\sqrt{3}}{7}\,cm$.	4 точки